

מתמטיקה לפיזיקאים 3

פרק 15 - שאלות מסכמות בנושא פונקציות מרוכבות

תוכן העניינים

1. תרגילים.....1

שאלות מסכמות ברמת בחינה:

שאלות:

(1) האם קיימת f אנליטית ב- $B_1(0) = \{z \mid |z| < 1\}$ כך ש- $|f(z)| = \ln(2 + |z|)$ לכל $z \in B_1(0)$?

(2) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < \infty$ ונניח כי קיים מספר α ממשי שאינו שלם כך שלכל $R > 0$ מתקיים: $\int_0^{2\pi} |f(Re^{i\theta})| d\theta \leq 2\pi R^\alpha$. הוכיחו כי: $f(z) = 0$ בטבעת.

(3) הוכח / הפרך:

קיימת פונקציה $f(z)$ אנליטית ב- $B_{1+\varepsilon}(0)$ כך ש- $f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(-\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^3}$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(4) הראו כי הטור: $\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{e^z - i}{e^z + i} \right)^n$ מתכנס בהחלט ברצועה: $U = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Im}(z) < \pi\}$.

(5) נניח כי: $f = u + iv$ שלמה כך ש- $v(x, y) = \cosh[u(x, y)]$. הוכיחו כי $f(z)$ קבועה.

(6) הוכח / הפרך:

קיימת סדרה: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \in \mathbb{C}$, $a_n \neq 0$ כך ש- $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$ ו- $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{k^n a_n}{(2k+1)^n} = 0$, $\forall k \in \mathbb{N}$.

(7) הוכיחו כי לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים: $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{2t \cos(\theta)} d\theta = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(n!)^2}$.

(8) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש- $\frac{1}{n+2} \neq f\left(\frac{1}{n}\right)$.

(9) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{1}{x^3+1} dx$.

(10) הוכח / הפרד:

קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש- $|z^2 \cdot f(z) + e^z| \leq 1$ לכל $|z| < 1$.

(11) נניח כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < 2$ כך שלכל $n \geq 0$ מתקיים:

$$\oint_{|z|=1} z^n f(z) dz = 0 \quad \text{הוכיחו כי} \quad \lim_{z \rightarrow 0} f(z) \text{ קיים וסופי.}$$

(12) הוכח / הפרד:

קיימת פונקציה שלמה $f(z)$ כך ש- $\frac{(-1)^n}{n} = f\left(\frac{1}{n}\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}$.

(13) האם קיימת f שלמה המקיימת:

$$f(x) = \begin{cases} x^4 & x \in \mathbb{R}, x > 0 \\ -x^4 & x \in \mathbb{R}, x < 0 \end{cases}$$

(14) ענו על הסעיפים הבאים:

א. הראו כי: $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |\operatorname{Log}(z)| = \infty$

ב. הראו כי: $\lim_{\substack{z \rightarrow 0 \\ z \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]}} |z \cdot \operatorname{Log}(z)| = 0$

ג. האם הפונקציה: $f(z) = \begin{cases} z \cdot \operatorname{Log}(z) & z \neq 0 \\ 0 & z = 0 \end{cases}$ אנליטית ב- $z=0$?

(15) חשבו את האינטגרל: $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx$

(16) פתחו את הפונקציה: $f(z) = \frac{1}{(z^2+1)^4}$ לטור לורן בטבעת $0 < |z-i| < 2$.

(17) נתון כי $f(z)$ אנליטית בטבעת $0 < |z| < 1$ וזוגית (כלומר: $f(z) = f(-z)$).

חשבו: $\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz$.

(18) נניח כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$. הוכיחו כי קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש-

$$f\left(\frac{1}{n}\right) \cdot f\left(\frac{1}{n+1}\right) \neq \frac{1}{n}$$

(19) תהי: $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה.

נניח כי: $f^2(z)$ ו- $f^3(z)$ אנליטיות ב- $B_1(0)$.

הוכיחו כי $f(z)$ אנליטית ב- $B_1(0)$.

(20) הוכח / הפרד:

אם: $f: B_1(0) \rightarrow \mathbb{C}$ לאו דווקא רציפה ו- $f^2(z)$ ו- $f^6(z)$ אנליטיות ב- $B_1(0)$

אז $f(z)$ בהכרח אנליטית ב- $B_1(0)$.

תשובות סופיות:

(1) לא.

(2) הוכחה.

(3) הוכחה.

(4) הוכחה.

(5) הוכחה.

(6) הוכחה.

(7) הוכחה.

(8) הוכחה.

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^3+1} dx = \frac{\pi}{3} \cdot \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)} \quad (9)$$

(10) הוכחה.

(11) הוכחה.

(12) הוכחה.

(13) לא קיימת.

(14) א. הוכחה. ב. הוכחה. ג. לא.

$$\int_0^{\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \quad (15)$$

$$a_k = \begin{cases} (-1)^{k+4} \frac{(k+7)(k+6)(k+5)}{6(2i)^{k+8}} & k \geq -4 \\ 0 & k \leq -5 \end{cases} \quad (16)$$

$$\oint_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz = 2\pi i \cdot \text{Res}[f(z), 0] = 0 \quad (17)$$

(18) הוכחה.

(19) הוכחה.

(20) הוכחה.